Fondements de la programmation linéaire

- **Généralités**
- **Notations et définitions**
- **Propriétés du problème de programmation linéaire**
- **Théorème fondamental de la programmation linéaire**
- **Représentation géométrique d’une solution de base réalisable**
- **Exemples**
- **Illustration de la notion de base**

Généralités sur la programmation linéaire

- La programmation linéaire traite de manière générale d'un problème d'allocation de **ressources limitées** parmi des activités **concurrentes** et ce d'une façon **optimale**.

- La programmation linéaire emploie un modèle mathématique qui décrit le problème réel.

- L'adjectif **"linéaire"** indique que toutes les fonctions mathématiques de ce modèle sont linéaires tandis que le terme **"programmation"** signifie essentiellement <u>planification</u>.

Notations et définitions

- Le problème général de programmation linéaire est la recherche de l'optimum (minimum ou maximum) d'une fonction linéaire de n variables x_j (j=1,2,...,n) liées par des équations ou inéquations linéaires appelées contraintes.

- Parmi les contraintes on distingue généralement celles du type $x_j \geq 0$ (ou $x_j \leq 0$), imposant à une partie ou à l'ensemble des variables d'être non négatives (ou non positives).

- Les variables peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles satisfaisant aux contraintes.

- Certaines des inéquations ont été multipliées par -1 de façon que toutes les inégalités soient dans le même sens ($\geq$ par exemple).

- Certaines des variables sont remplacées par leurs opposées pour que les contraintes du type $x_j \geq 0$ ou $x_j \leq 0$ soient toutes des conditions de non-négativité.

Formulation algébrique

Minimiser (ou maximiser) $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (fonction objective)

Sujet à:

contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_j, \quad i = 1, 2, ..., p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \quad i = p + 1, p + 2, ..., m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., q$$

$$x_j \text{ quelconque}, \quad j = q + 1, q + 2, ..., n,$$

où les constantes c_j, a_{ij} et b_j sont des nombres réels.

1e formulation équivalente

Forme canonique

$$\text{Minimiser (ou maximiser) } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Sujet à: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Note : Utilisée en théorie de la dualité.

2ième formulation équivalente

Forme standard

$$\text{Minimiser (ou maximiser) } z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\text{Sujet à: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Note : Servira au développement des méthodes de calcul.

$3^{\text{ième}}$ formulation équivalente

Forme standard matriciel

Minimiser $z = c^t x$

sujet à $Ax = b$

$x \geq 0$

où $c = [c_1, c_2, ..., c_n]^t,$

$b = [b_1, b_2, ..., b_m]^t$

et $A = [a_{ij}, i = 1, 2, ..., m \text{ et } j = 1, 2, ..., n]$

est une matrice de dimension m x n.

Note : Les formulations précédentes sont équivalentes; les opérations suivantes sont là pour nous en convaincre.

Opérations à effectuer pour passer d'une forme à l'autre

Opération A

En utilisant la relation

$$\text{minimum } f(x) = -\text{maximum } [-f(x)]$$

dans laquelle f(x) représente la fonctionnelle linéaire à optimiser, on peut toujours se ramener à un problème de minimisation (ou de maximisation).

Opération B

Une variable de signe quelconque, x, peut toujours être remplacée par deux variables non négatives x+ et x-. Il suffit de poser

$$x = x^+ - x^-$$

où $x^+ = \text{maximum } [0, x]$, $x^- = \text{maximum } [0, -x]$.

Note :

Les variables x+ et x- ne peuvent pas faire partie d'un même "programme de base" i.e. l'une d'entre elles est nécessairement nulle dans l'une, au moins, des solutions optimales du problème.

Opérations à effectuer pour passer d'une forme à l'autre

Opération C

Toute équation de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

peut être remplacée par les deux inéquations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

$$- \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq - b_i$$

Opérations à effectuer pour passer d'une forme à l'autre

Opération D

Toute inéquation, par exemple

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

peut être remplacée par les relations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i = b_i$$

$$e_i \geq 0$$

obtenues par l'introduction d'une variable supplémentaire non négative appelée variable d'écart et affectée d'un coefficient nul dans la forme à optimiser.

Exemple 2.2.1 - Mise sous forme canonique

Le problème suivant est déjà sous forme canonique :

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

sous les contraintes:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 100$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 80$$

Exemple 2.2.2 - Mise sous forme canonique

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

Max $C = 6x_1 - 3x_2 + x_3$	$\rightarrow$	Min $-C = -6x_1 + 3x_2 - x_3$
sous les contraintes:		sous les contraintes:
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,$		$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 65$		$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 65$
$x_1 + x_2 - x_3 \geq 5$		$x_1 + x_2 - x_3 \geq 5$
$x_1 + x_2 = 10$		$x_1 + x_2 = 10$

- Les variables doivent toutes être positives ou nulles :

  $x_2 \leq 0$ et x_3 libre $\Rightarrow$ nous devons poser :

  $x_1 = y_1, \qquad x_2 = -y_2, \qquad x_3 = y_3 - y_4,$

  où les variables y_i, $i = 1,2,3,4$ sont toutes positives ou nulles.

- Toutes les contraintes doivent être du type ($\geq$) i.e.

  $4y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \leq 65$ devient : $-4y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq -65$

  $y_1 - y_2 = 10$ devient : $y_1 - y_2 \geq 10$ et $-y_1 + y_2 \geq -10$

Exemple 2.2.2 - Mise sous forme canonique (suite)

La forme canonique de notre problème est finalement :

$$\text{Min } -C = -6y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4$$

sous les contraintes:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad y_4 \geq 0,$$

$$\begin{array}{rrrrcr}
-4y_1 & +2y_2 & -y_3 & +y_4 & \geq & -65 \\
y_1 & -y_2 & -y_3 & +y_4 & \geq & 5 \\
y_1 & -y_2 & & & \geq & 10 \\
-y_1 & +y_2 & & & \geq & -10
\end{array}$$

Exemple 2.2.3 - Mise sous forme standard

- Un atelier produit trois types de remorques :

  x_1 = # de remorques "plates-formes" produites par mois,
  x_2 = # de remorques "modèle économique" par mois,
  x_3 = # de remorques de luxe produites par mois.

- L'atelier dispose de 24 hommes-jours/mois pour le travail du métal et de 60 hommes-jours/mois pour le travail du bois.

  Les ressources utilisées pour produire chaque type de remorque (en homme-jours/mois) sont:

	Plate-forme	Économique	De luxe
travail du métal	½	2	1
travail du bois	1	2	4

Le profit par remorque produite, pour chaque type de remorque est :

	Plate-forme	Économique	De luxe
Profit	6	14	13

L'objectif visé par l'atelier est de maximiser ses profits.

Le problème s'écrit :

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max} & 6x_1 & + 14x_2 & + 13x_3 & \\
\text{sujet à} & \frac{1}{2} x_1 & + 2x_2 & + x_3 & \leq 24 \\
 & x_1 & + 2x_2 & + 4x_3 & \leq 60 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

ou encore, sous sa forme standard,

$$\text{Min} \quad -6x_1 \quad -14x_2 \quad -13x_3$$

Sujet à

$$\tfrac{1}{2} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Propriétés du problème de programmation linéaire

- L'ensemble des points réalisables $\{ x \mid A x = b, x \geq 0 \}$ correspondant aux contraintes d'un problème de PL.

- Si A de dimension m x n ($m \leq n$) est de rang m i.e., les lignes de A sont linéairement indépendantes,
  alors B est une base du système $A x = b$ si B est une sous-matrice non-singulière (inversible) d'ordre m de A.

- Les variables x_j correspondant aux colonnes de la matrice B sont dites **variables de base** (relativement à la base B). Les autres variables sont dites **variables hors-base** (relativement à la base B).

- Pour simplifier la notation, supposons que B est formée des m premières colonnes de A.

Dénotons par R la sous-matrice formée des autres colonnes de A,
par x_B le vecteur des variables de base et
par x_R le vecteur des variables hors-base.

- $Ax = b$ peut alors s'écrire par :

$$A\,x = (B\ R)\begin{vmatrix} x_B \\ x_R \end{vmatrix} = b$$

$$= B\,x_B + R\,x_R = b$$

- Puisque B est non singulière, alors B^{-1} existe et

$$I\,x_B + B^{-1} R\,x_R = B^{-1} b.$$

- La <u>solution de base</u> du système $A\,x = b$ associée à la base B est de la forme:

$$x_B = B^{-1} b$$
$$x_R = 0.$$

- De plus, $x_B = B^{-1} b \geq 0$, alors cette <u>**solution de base**</u> est **réalisable** et elle appartient à :

$$\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

- Lorsque l'une des variables de x_B vaut 0, on dit que l'on a une **solution de base dégénérée**.

- Un vecteur x appartenant à $\{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ s'appelle une **solution réalisable**. Si cette solution réalisable est aussi une solution de base, il s'agit alors d'une **solution de base réalisable**.

Présence de contraintes redondantes

- Précédemment, nous avons supposé que la matrice A est de rang m. Sinon, une contrainte peut être exprimée comme une combinaison linéaire des autres contraintes.

Exemple : $\frac{1}{2}(1. + 2. + 3.) \equiv 4.$

$$
\begin{array}{lccccccl}
1. & x_1 & + & x_2 & & & = 3 \\
2. & & & x_2 & + & x_3 & = 3 \\
3. & x_1 & & & + & x_3 & = 8 \\
4. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 7
\end{array}
$$

Approche systématique pour éliminer les équations redondantes

Il s'agit d'effectuer des <u>opérations élémentaires</u> sur le système $Ax = b$:

- MULTI $(r, \propto)$: consiste à multiplier les 2 membres de la $r^{\text{ième}}$ équation par $\propto \neq 0$;
- ADDMUL$(r, s, ß)$: consiste à ajouter à la $r^{\text{ième}}$ équation, la $s^{\text{ième}}$ équation qui a été multipliée par $ß \neq 0$.

Exemple précédent :

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & = 3 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = 3 \\
x_1 & & & + & x_3 & = 8 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 7
\end{array}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 8 \\
1 & 1 & 1 & 7
\end{array}\right|
\xrightarrow{\text{ADDMUL } (3,\ 1,\ -1)}
\left|\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 5 \\
1 & 1 & 1 & 7
\end{array}\right|
$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{ADDMUL }(4,\ 1,\ -1)} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{ADDMUL }(3,\ 2,\ 1)} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{MULTI }(3,\ \frac{1}{2})} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

La nouvelle matrice A est de rang 3 et son déterminant est égal à 1 ($\neq 0$).

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

Nous considérons donc à partir de maintenant que le problème (P) sous forme standard est tel que le rang de la matrice A est égal à son nombre de lignes m ce qui signifie que le système $Ax = b$ sera compatible et ne contiendra aucune contrainte redondante et, donc, en particulier, $m \leq n$.

Théorème fondamental de la programmation linéaire

Considérons maintenant le problème de programmation linéaire sous sa forme standard matricielle

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } c^t x \\
&\text{sujet à } \ Ax = b \qquad\qquad\qquad\qquad (P) \\
&\qquad\qquad\ \ x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Étant donné que la matrice A est de rang m,

- si l'ensemble des points réalisables n'est pas vide,
  alors $\exists$ une solution de base réalisable dans cet ensemble,

- s'il existe une solution réalisable optimale,
  alors il existe une solution de base réalisable optimale.

Implications

- Ce théorème nous indique que lors de la résolution de (P), on peut restreindre notre attention au sous-ensemble des solutions de base réalisables de l'ensemble $\{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$.

  Le nombre de solutions de base ne dépasse pas :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)\,!}$$

Représentation géométrique d'une solution de base réalisable

Problème	**contraintes**
Forme canonique :	demi-espaces fermés
Forme standard :	hyperplans

Définitions :

- $\{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ est un ensemble **fermé convexe** c'est-à-dire, un **polytope** car, il s'agit d'un sous-ensemble de $\Re^n$ qui s'exprime comme l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans de $\Re^n$.

- Un point x appartenant au polytope est un **point extrême** (ou sommet de ce polytope) si x ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de deux autres points distincts du polytope.

Théorème :

Étant donné une matrice A de dimension m x n et $b \in \Re^m$, et le polytope $X = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ suivant,

x est un **point extrême** de X $\Leftrightarrow$
x est une **solution de base réalisable** appartenant à X.

Exercice :

Il s'agit de montrer que "X et Y sont convexes $\Rightarrow$ X + Y l'est aussi".

Montrons que $\forall z_1, z_2 \in X + Y, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \in X + Y$.

Par déf$^{\underline{n}}$, $\exists x_1, x_2 \in X, \exists y_1, y_2 \in Y$ tels que $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$.

D'où, $\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda (x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) \\
&= \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \\
&= x + y \quad \text{où } x \in X, y \in Y \qquad \text{car X et Y sont convexes} \\
&\in X + Y \qquad \text{par définition.}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ X et Y sont convexes $\Rightarrow$ X + Y l'est aussi.

Exemple :

Considérons le polytope X suivant:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Cherchons deux points appartenant à X, par exemple, (0, 1/3, 2/3) et (1/2, 0, 1/2).

- L'intersection des 2 plans $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $2x_1 + 3x_2 = 1$ est la droite $\{\lambda\ (0, 1/3, 2/3) + (1 - \lambda)\ (1/2, 0, 1/2) \mid \lambda \in \Re\}$.

- L'intersection de cette droite avec l'octant positif est donnée par: $0 \leq \lambda \leq 1$, ce qui donne le segment de droite d'extrémités (1/2, 0, 1/2) et (0, 1/3, 2/3).

- Les extrémités du segment de droite sont les sommets du polytope.

Essayons maintenant de résoudre le problème suivant :

$$\text{Min} \quad c^t x = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$$

sujet à $x \in X$.

ou encore

$$\text{Min } c^t [\lambda(0, 1/3, 2/3)^t + (1 - \lambda)(1/2, 0, 1/2)^t]$$

sujet à $\lambda \in [0, 1]$

ou encore

$$c^t (1/2, 0, 1/2)^t + \quad \text{Min } \lambda\, c^t (-1/2, 1/3, 1/6)^t.$$

sujet à $\lambda \in [0, 1]$

$c^t (-1/2, 1/3, 1/6)^t > 0 \Rightarrow$ le minimum est atteint à $\lambda = 0$ i.e., au sommet du polytope $(1/2, 0, 1/2)$.

$< 0 \Rightarrow$ Le minimum est atteint à $\lambda = 1$ i.e., au sommet du polytope $(0, 1/3, 2/3)$.

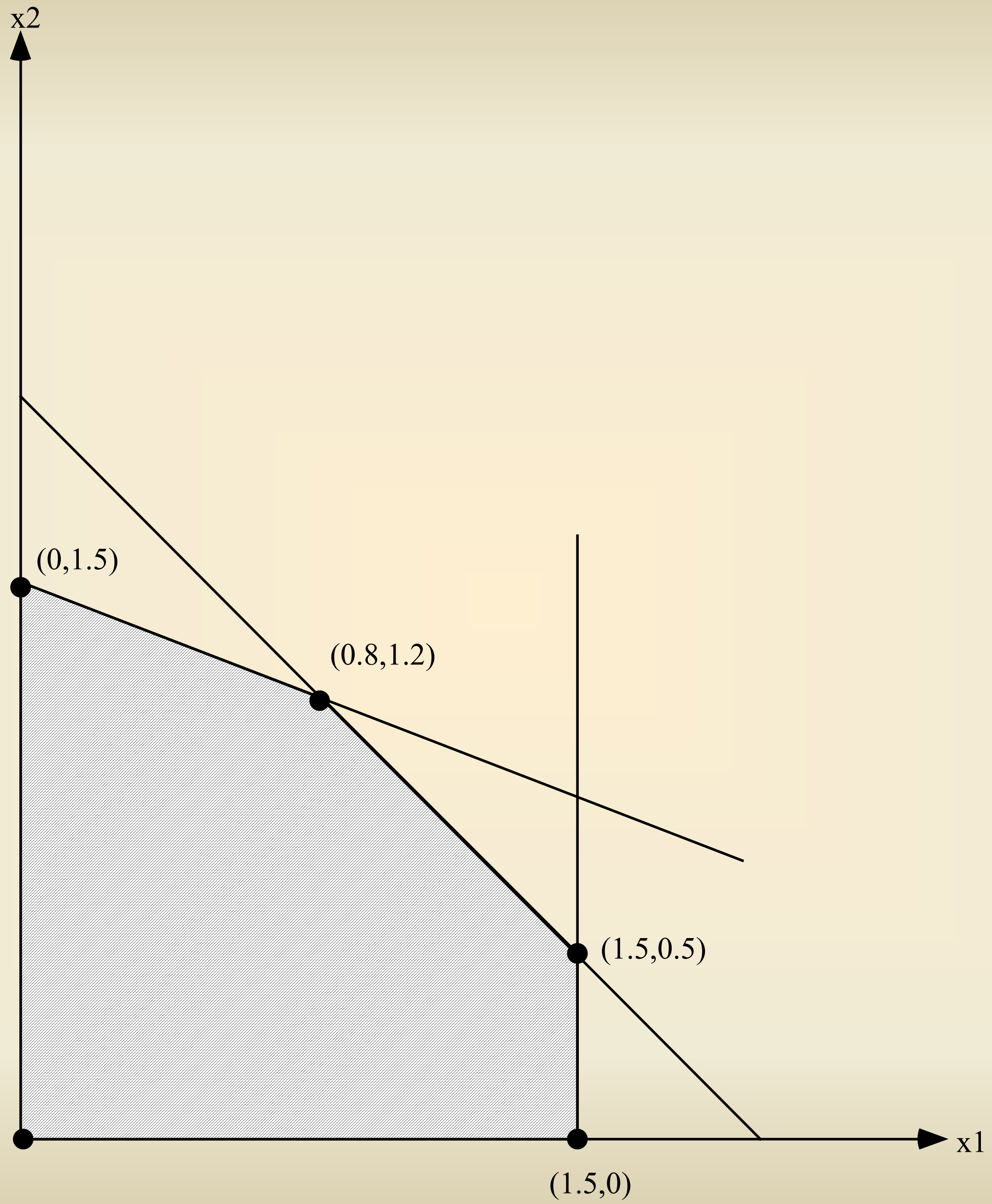
$= 0 \Rightarrow$ Le minimum est atteint $\forall\ \lambda \in [0,1]$, en particulier pour les valeurs de $\lambda = 0$ ou 1.

Exemple :

$$\begin{array}{llll}
\text{Min } z = & -2x_1 & -x_2 & \\
\text{Sujet à} & x_1 & +\ 8/3\ x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 & +\ x_2 & \leq 2 \\
 & 2x_1 & & \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. & &
\end{array}$$

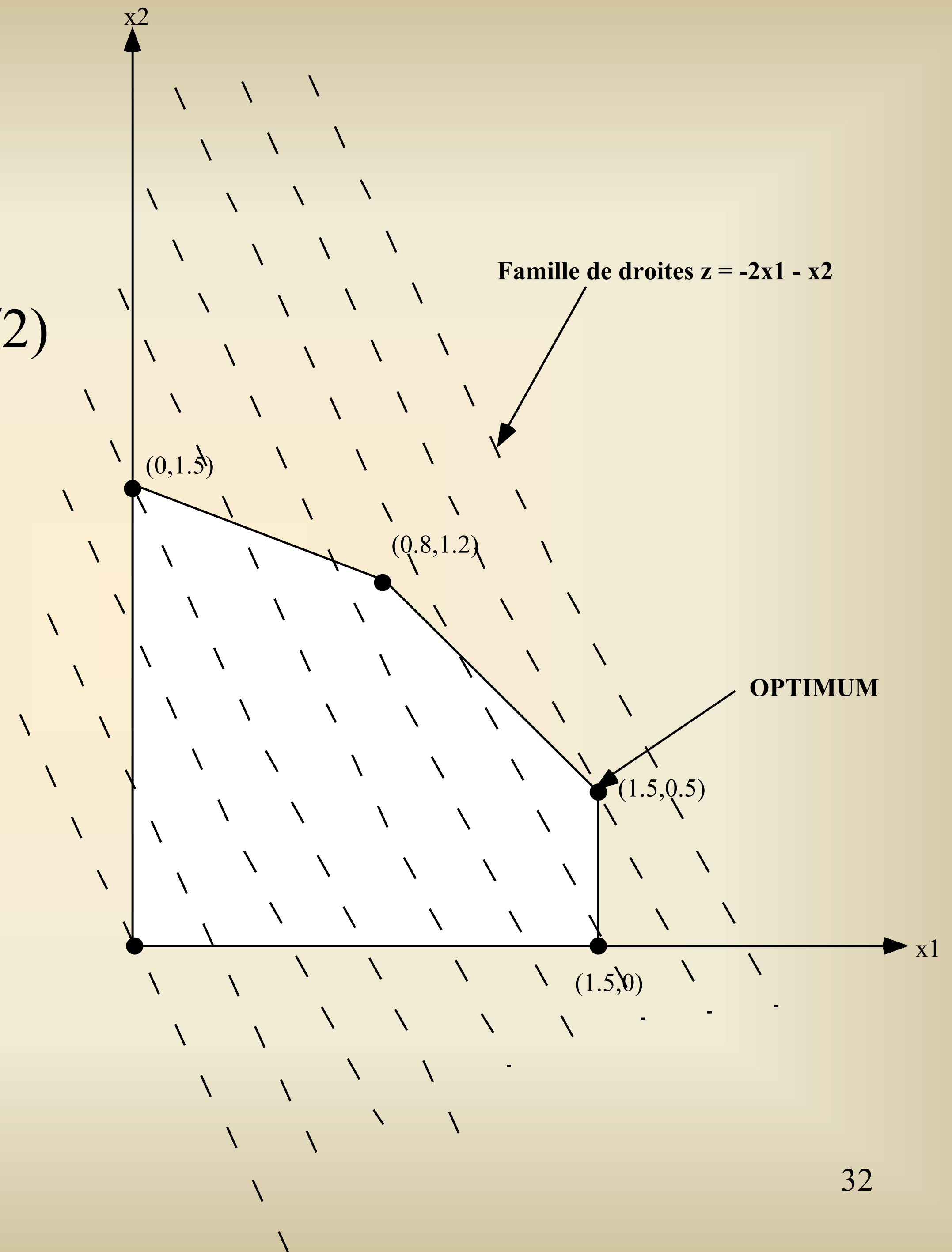
La région réalisable pour (x_1, x_2) est à la diapositive suivante.

Soient x_3, x_4 et x_5 les variables d'écart, à chaque sommet du polytope, 2 des 5 variables sont nulles;
les 3 autres variables sont les variables de base.


x2
(0,1.5)
(0.8,1.2)
(1.5,0.5)
x1
(1.5,0)

Déterminons le point minimum de z.

Le minimum est atteint au point $(x_1, x_2) = (3/2, 1/2)$ et $z = -3\ 1/2$.



Méthode graphique

- Ce sont les problèmes de PL ayant au plus 3 variables principales.

- On reporte sur un graphique chacune des contraintes du problème et on détermine la région commune à l'ensemble de ces contraintes.

  La région commune, si elle existe, constitue la région des solutions réalisables.

- On détermine les coordonnées des points extrêmes ou sommets de la région des solutions réalisables en les localisant directement sur le graphique ou plus exactement en résolvant simultanément les éq^{n}s des droites qui se coupent à chacun des points extrêmes.

- On substitue les coordonnées de chaque point extrême dans l'expression de la fonction économique. Le point extrême qui optimise la fonction économique correspond à la solution optimale.

Exemple :

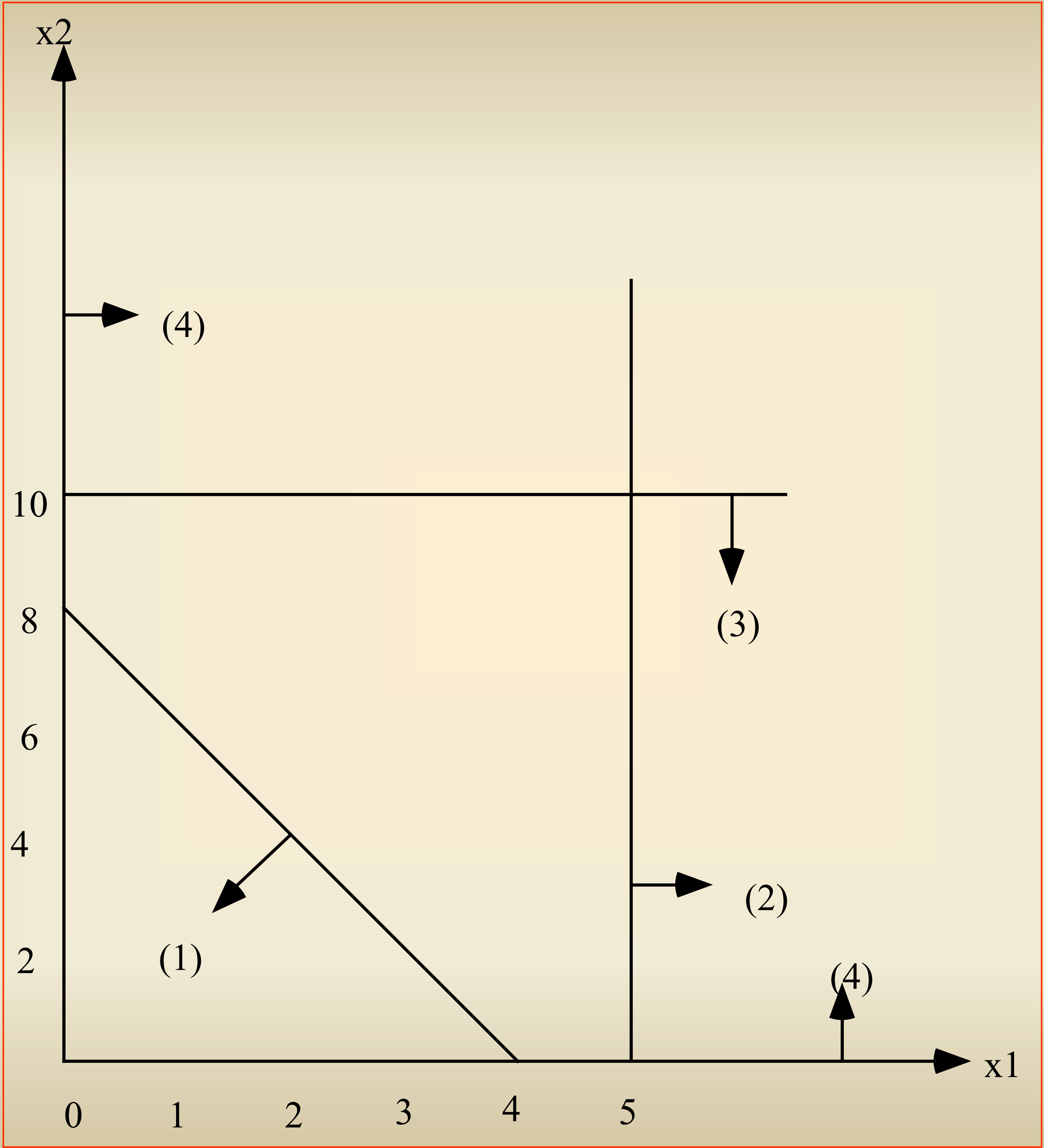
Considérons le modèle suivant:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & z = & 3x_1 & +2x_2 & & \\
\text{Sujet à} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 & (1) \\
 & & x_1 & & \geq 5 & (2) \\
 & & & x_2 & \leq 10 & (3) \\
 & & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. & &
\end{array}
$$

En effectuant le tracé des contraintes, on voit facilement que le problème n'a pas de solution réalisable.

En effet, on ne peut pas toujours avoir la garantie que tout modèle de programmation linéaire possède une solution réalisable.

Il se peut que les contraintes du modèle soient incompatibles.

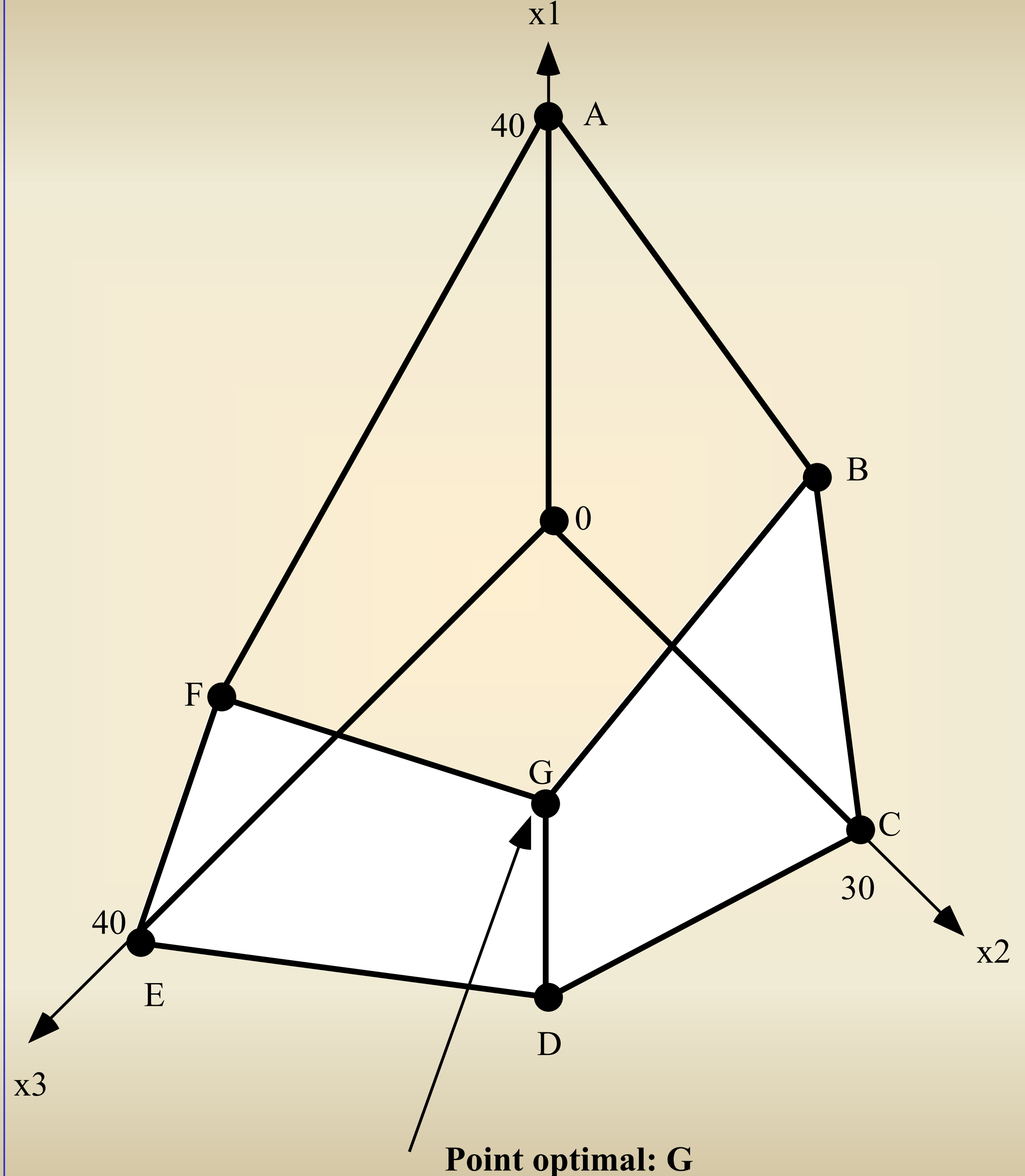

x2
(4)
10
(3)
8
6
4
(2)
(1)
2
(4)
x1
0
1
2
3
4
5

Exemple :

Il s'agit du problème à résoudre suivant:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & z = & 10x_1 & + 13x_2 & + 12x_3 & \\
\text{Sujet à} & & x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & \leq 120 \\
 & & 3x_1 & + x_2 & + 2x_3 & \leq 120 \\
 & & x_1 & + 4x_2 & + x_3 & \leq 120 \\
 & & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0. &
\end{array}
$$

L'intersection des trois contraintes donne la région des solutions réalisables suivante.


x1
A
40
B
0
F
G
C
30
x2
40
E
D
x3
Point optimal: G

Détermination de la solution optimale

Points extrêmes	Coordonnées	$z = 10x_1 + 13x_2 + 12x_3$
0	(0, 0, 0)	0
A	(40, 0, 0)	400
B	(32.727, 21.818, 0)	613.90
C	(0, 30, 0)	390
D	(0, 24, 24)	600
E	(0, 0, 40)	480
F	(17.143, 0, 34.286)	582.86
G	(20, 20, 20)	700 ←

La solution optimale est:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 20 \text{ et } z = 700.$$

Exemple :

Considérons le problème : Max $3x_1 + 2x_2$

$$\begin{array}{lll} x_1 & - x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \leq 2 \\ x_1 & + x_2 & \leq 3 \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. & \end{array}$$

On peut tracer les droites ayant pour équations les contraintes (y compris celles de non-négativité) sous forme saturée (signe =).

Sur chacune de ces droites nous avons indiqué par une flèche le demi-plan admissible. L'intersection de tous les demi-espaces admissibles constitue un polygone.

Il s'agit de trouver le point de ce polygone qui donne à la fonction $z = 3x_1 + 2x_2$ sa plus grande valeur. Le point recherché est A = (2,1).

Les coordonnées de ce point A sont solution du système saturé :

$$\begin{aligned} x_1 \quad & - x_2 &= 1 \\ x_1 \quad & &= 2 \\ x_1 \quad & + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

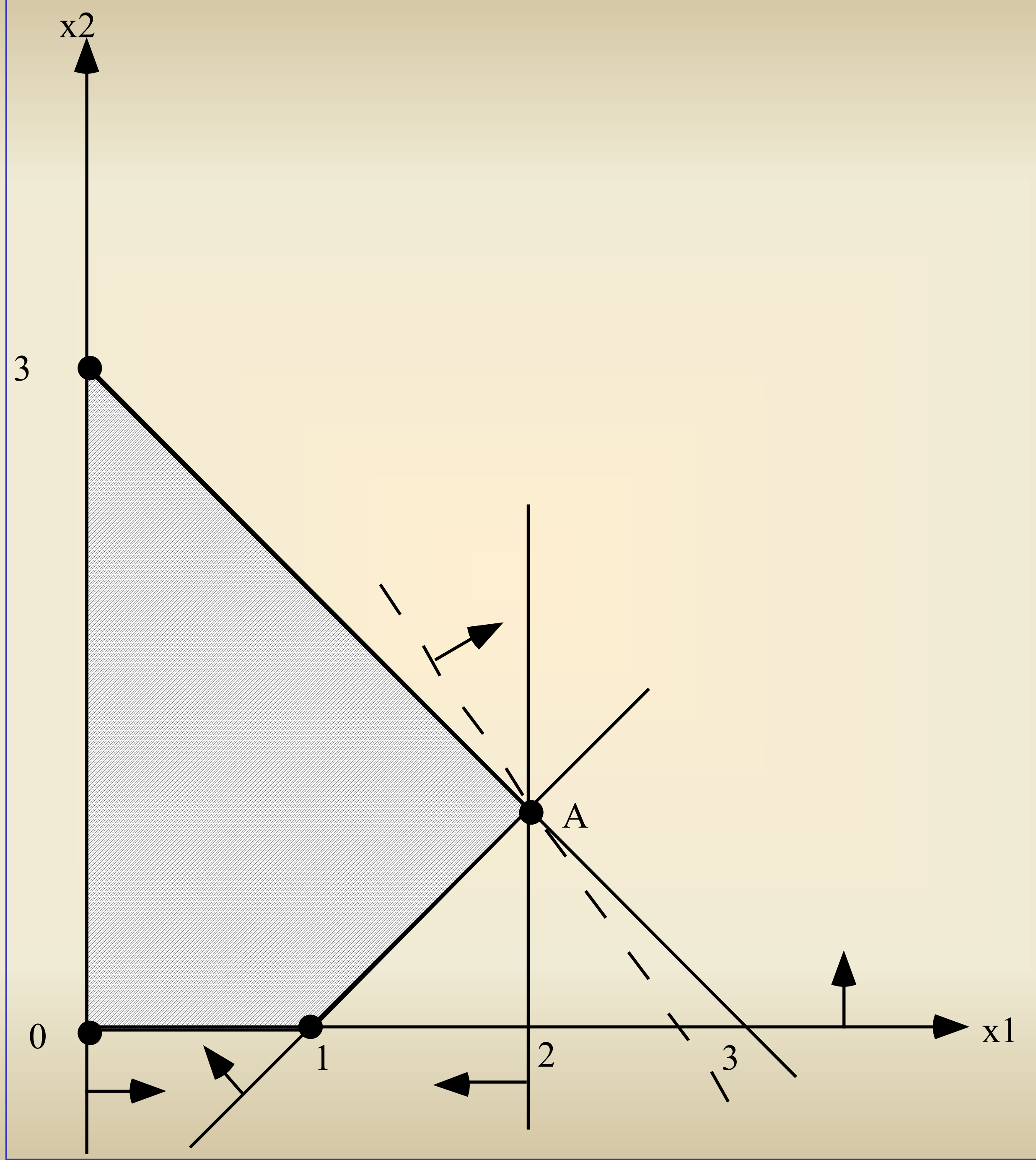
Ce système est redondant.

On voit sur la figure suivante que la contrainte $x_1 \leq 2$ peut être omise.

De la même façon, on note que :

$$x_1 - x_2 \leq 1 \text{ et } \quad x_1 + x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 \leq 2.$$

En résolvant le problème de cet exemple sous sa forme standard, on obtiendrait comme solution de base réalisable optimale (2,1,0) avec une variable d'écart égale à 0. Ce problème est dégénéré.


x2
3
A
0
1
2
3
x1

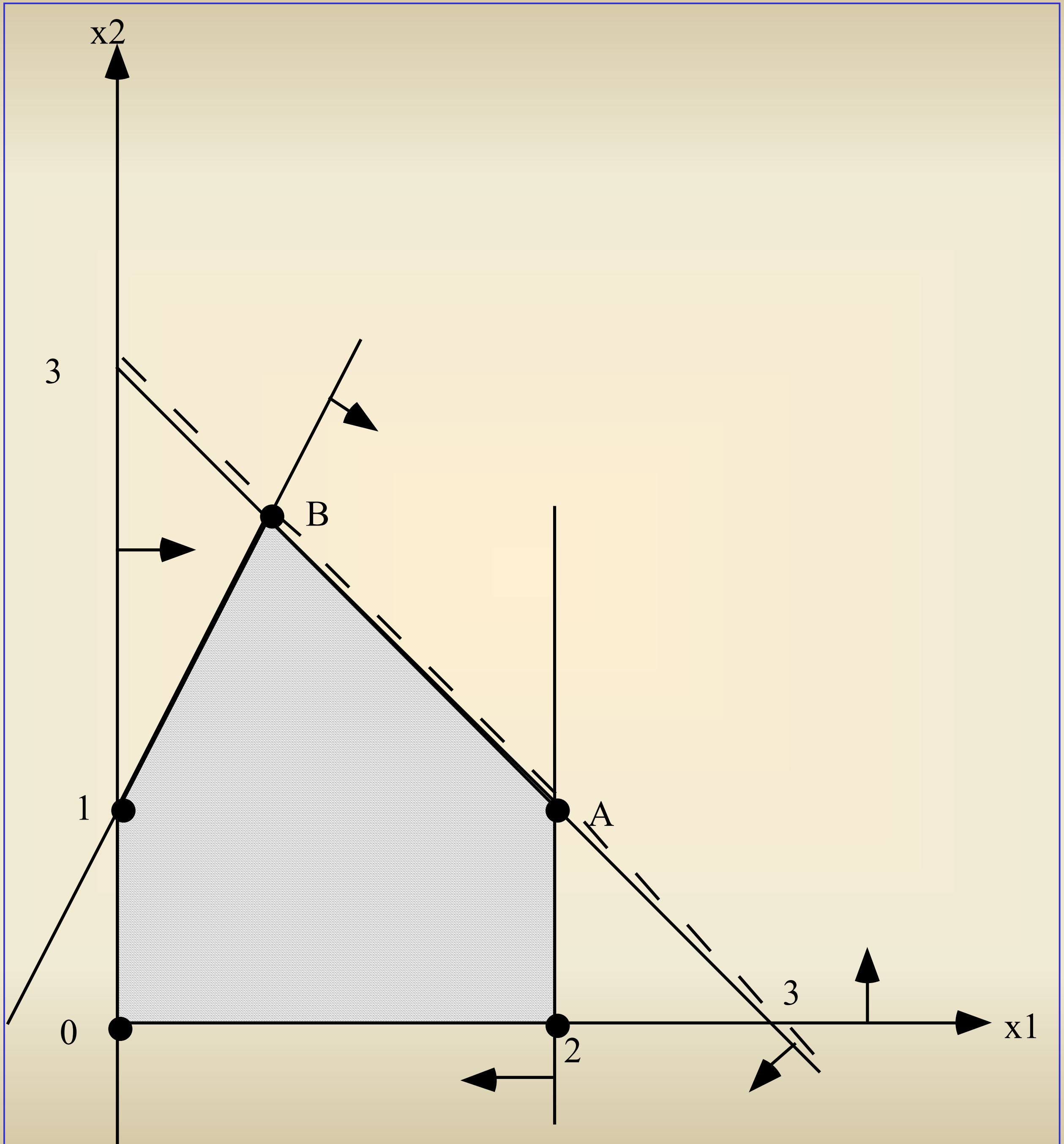
Exemple :

Considérons le problème

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & x_1 & + x_2 & \\
\text{sujet à} & -2x_1 & + x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 & & \leq 2 \\
 & x_1 & + x_2 & \leq 3 \\
 & x_1 & & \geq 0 \\
 & & x_2 & \geq 0.
\end{array}
$$

On trouve ici non plus un sommet comme solution optimale, mais l'ensemble des points du segment AB (voir la diapositive suivante).

Les deux points A et B sont des solutions réalisables de base optimales, et toute combinaison linéaire convexe de ces 2 points est aussi une solution réalisable optimale non extrémale.
Il y a donc une infinité de solutions optimales à ce problème.


x2
3
B
1
A
0
2
3
x1

Exemple :

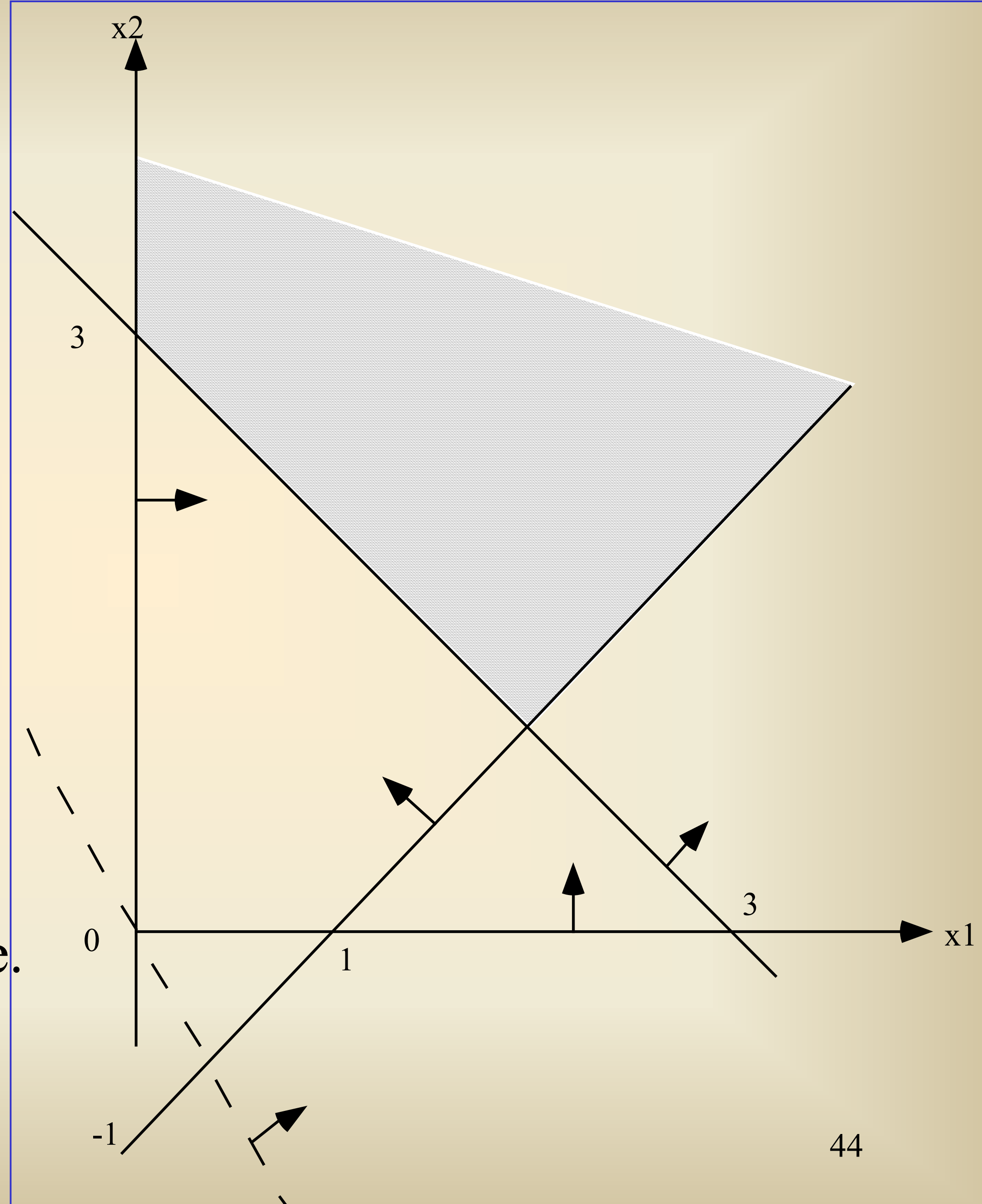
$$
\begin{array}{llll}
\textbf{Max} & 3x_1 & + 2x_2 & \\
 & x_1 & - x_2 & \leq 1 \\
 & x_1 & + x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 & & \geq 0. \\
 & & x_2 & \geq 0.
\end{array}
$$

Aussi loin que l'on déplace l'hyperplan:

$$z = 3x_1 + 2x_2,$$

dans le sens des z croissants, cet hyperplan rencontrera toujours le domaine réalisable.

Il n'y a pas de solution optimale finie.



Corollaires :

Si l'ensemble des points réalisables $\{ x : A x = b, x \geq 0 \}$ est non vide, alors ce polytope comporte au moins un point extrême.

S'il existe une sol$^{\underline{n}}$ réalisable optimale finie pour le problème de PL, alors $\exists$ une solution optimale qui est un point extrême du polytope $\{ x : A x = b, x \geq 0 \}$.

Le polytope $\{ x : A x = b, x \geq 0 \}$ comporte au plus un nombre fini de points extrêmes.

Illustration de la notion de base

Soit le problème de flot à coût minimum dans un réseau orienté $G = (V,E)$.

Distinguons deux sommets $s, t \in V$: s est la source du flot où se retrouve une disponibilité de v unités et t est la destination (puit) du flot où se retrouve une demande de v unités.

À chaque arc $(i,j) \in E$ on associe une capacité d_{ij} représentant la valeur maximum du flot x_{ij} pouvant emprunter l'arc et un coût unitaire c_{ij} du flot dans l'arc.

Le problème est de déterminer la valeur du flot n'excédant pas la capacité dans chaque arc pour satisfaire la demande à t à partir de la disponibilité à s tout en minimisant le coût total.

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Sujet à

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{si} \quad i = s \\ o & \text{si} \quad i \neq s,t \\ -v & \text{si} \quad i = t \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \qquad \text{pout tout } (i,j) \in E$$

où $P_i = \{j \in V\text{: } (i,j) \in E\}$ et $B_i = \{j \in V\text{: } (j,i) \in E\}$.

Concentrons-nous sur les contraintes de conservation du flot

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{si} \quad i = s \\ o & \text{si} \quad i \neq s,t \\ -v & \text{si} \quad i = t \end{cases}$$

Si on dénote par x le vecteur dont les composantes sont les x_{ij}, alors le système peut s'écrire sous la forme $A\ x = [v, 0,\ldots, 0, -v]^t$ où A est la matrice d'incidence du réseau orienté G.

Toute base de ce système est une matrice dont les colonnes correspondent aux arcs d'un arbre partiel du réseau et vice versa.

Théorème

La matrice d'incidence A d'un graphe orienté simple et connexe composé de m sommets et de n arcs est de rang (m - 1).

Théorème

Considérons la matrice d'incidence A d'un graphe orienté simple et connexe G composé de m sommets et de n arcs. Une sous-matrice de A carré de dimension (m - 1) X (m - 1) est non singulière (forme une base) si et seulement si les arcs associés aux colonnes de cette sous-matrice sont ceux d'un arbre partiel du graphe orienté G.

****